最適都市規模の求め方

**０）数学的注**

　自然対数について、底がということは、

、

**１）費用最小化の都市規模**

・横軸を人口の自然対数値　=LN(引数)

・縦軸を人口当たりの歳出額の自然対数値

としたＸ－Ｙプロットのグラフを作成する。

このグラフを見ると、人口規模に対して人口当たりの歳出額はＵ字形を描いていることがわかる。すなわち、自治体（地域）*i*の住民人口、：自治体*i*の歳出額、 ：自治体*i*の面積　と定義して、

、、

と置き換えた場合、

　　(1) 

といった二次関数が想定される。ここで、予想されるパラメータの符号は、



である。

(1)式を最小二乗法で推定し、費用最小化の都市規模を求めよ。代数的には、(1)式を完全平方式にして求める場合と微分して求める場合がある。前者については、



後者に関しては、



より、



したがって、費用が最小となる都市規模は



**２）便益最大化の都市規模（便益＝１人当たりの所得額）**

・横軸を人口の自然対数値

・縦軸を人口当たりの所得額の自然対数値

としたＸ－Ｙプロットのグラフを作成する。

このグラフを見ると、人口規模に対して人口当たりの所得額は逆Ｕ字形を描いていることがわかる。すなわち、自治体（地域）*i*の住民人口、：自治体*i*の住民所得　と定義して、

、

と置き換えた場合、

　　(2) 

といった二次関数が想定される。ここで、予想されるパラメータの符号は、



である。

(2)式を最小二乗法で推定し、便益最大化の都市規模を求めよ。代数的には、(2)式を完全平方式にして求める場合と微分して求める場合がある。後者に関しては、



より、

　　

したがって、費用が最小となる都市規模は



**３）純便益が最大となる都市規模**

　(2)-(1) で考える。すなわち、

(3) 

　これまでと同様にして(3)式の値が最大となるは



したがって、１人当たりの純便益（便益－費用）が最大となる都市規模は



以上の結果に基づいて、１人当たりの純便益（便益－費用）が最大となる都市規模を求めよ。