計算の補足説明（計算式が追えないときの参考にしてください）

①　3 次元並進(translation)分配関数 q の導出

$$q=\sum_{i=1}^{\infty}g_i\exp\left(-\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_0}{kT}\right)=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right)\exp\left(-\frac{n^2h^2}{8ma^2kT}\right)dn=\frac{1}{2}\pi\int_0^{\infty}n^2\exp\left(-\frac{n^2h^2}{8ma^2kT}\right)dn$$

ここで積分公式（教科書付録 A 参照）

$\int_0^{\infty}x^2\exp(-Ax^2)dx=\frac{1}{4A}\sqrt{\frac{\pi}{A}}$ を用いると、（$A=\frac{h^2}{8ma^2kT}$ と考えよ。）

$$与式=\frac{1}{2}\pi\times\frac{1}{4}\frac{8ma^2kT}{h^2}\sqrt{\frac{\pi\times 8ma^2kT}{h^2}}=2^{3/2}\times\left[\frac{\pi ma^2kT}{h^2}\right]^{3/2}=\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\cdot a^3=\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\cdot V$$

②　単位量子数 n あたりの分子の割合 $\frac{1}{N}\frac{dN}{dn}$

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dn}=\frac{1}{N}\times N_0g_n\exp\left(-\frac{\varepsilon_n-\varepsilon_0}{kT}\right)=\frac{1}{q}\times g_n\exp\left(-\frac{\varepsilon_n-\varepsilon_0}{kT}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\frac{n^2}{V}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{8ma^2kT}\right)$$

③　単位エネルギー間隔 ε あたりの分子の割合 $\frac{1}{N}\frac{dN}{d\varepsilon}$

（一次元の時に用いた $\frac{dn}{d\varepsilon}=\frac{a}{h}\sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}}$ を思い出すこと。また、$\varepsilon=\frac{n^2h^2}{8ma^2}$ である。）

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{d\varepsilon}=\frac{1}{N}\frac{dN}{dn}\frac{dn}{d\varepsilon}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\frac{n^2}{a^3}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\times\frac{a}{h}\sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{n^2h^2}{8ma^2kT}\right)^{3/2}\frac{n^2}{n^3}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\times\frac{a}{h}\sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^{3/2}\frac{a}{nh}\sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}\varepsilon\times\left(\frac{2ma^2}{n^2h^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}\varepsilon\times\left(\frac{1}{4\varepsilon}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

③　単位速さ間隔 v あたりの分子の割合 $\frac{1}{N}\frac{dN}{dv}$

（一次元の時に用いた $\frac{d\varepsilon}{dv}=mv=\sqrt{2m\varepsilon}$ を思い出すこと。また、$\varepsilon=\frac{1}{2}mv^2$ である。）

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dv}=\frac{1}{N}\frac{dN}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dv}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\times mv$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)^{1/2}\times mv\times\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$ ・・・Maxwell-Boltzmann 分布式

④　最も確率の高い速さ v_{most} (教科書では=a)

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dv}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\left\{2v\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)+v^2\left(-\frac{mv}{kT}\right)\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right\}=0$$

$2v-\frac{mv^3}{kT}=0$ となり、$v\left(2-\frac{mv^2}{kT}\right)=0$ なので、$v_{\mathrm{most}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$

⑤　平均の速さ $\bar{v}$

$$\bar{v}=\int v\times\frac{dN}{N}=\int\left[v\times\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right]dv=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

ここで積分公式（教科書付録 A 参照）

$\int_0^\infty x^3\exp(-Ax^2)dx=\frac{1}{2A^2}$ を用いると、（$A=\frac{m}{2kT}$ と考えよ。）

与式$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\frac{1}{2}\frac{4k^2T^2}{m^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times 2\times\sqrt{\frac{kT}{m}}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$

⑥　根二乗平均速さ $\sqrt{\bar{v}^2}$

$$\bar{v}^2=\int v^2\times\frac{dN}{N}=\int\left[v^2\times\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right]dv=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^4\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

ここで積分公式（教科書付録 A 参照）

$\int_0^\infty x^4\exp(-Ax^2)dx=\frac{3}{8A^2}\sqrt{\frac{\pi}{A}}$ を用いると、（$A=\frac{m}{2kT}$ と考えよ。）

与式$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\frac{4k^2T^2}{m^2}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{\frac{kT}{m}}\times\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}=\frac{3kT}{m}$

したがって、$\sqrt{\bar{v}^2}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$