学籍番号　　　　　　　　　名前：

ボルツマン分布則を誘導したい。次の手順に従って、重要な式を書きこみなさい。

系の全粒子の数をNとして、異なるエネルギーを持つ組 0,1,2,3…に粒子がN_0,N_1,N_2,N_3…個というように分配されるとすると、その場合の数Wは、次のように書ける。

$W =$ (1)

最も確率の高い分布（これを Boltzmann 分布という）を与えるのは、場合の数が最大になるときで、Wが非常に大きい場合、W の最大値は、$\ln W$ の値を調べることで探し出せる。

$\ln W =$ $\quad =$ (2)

Wが最大になるためには、$\ln W$の変分（N_jで微分）が０になる必要があり、$\ln N!$は定数だから、

$\delta \ln W =$ $\quad = 0$ (3)

ここで重要な公式：Stirling の近似（$\ln x! = x\ln x - x$）を用いると、

(4)

また、今、一定の系を考えているので、全粒子数Nと全エネルギーEは一定であるから、これらの変分もまた０である。j組のエネルギーをε_jとすると、

(5)

(5)の 2 式に任意の定数α,βを掛けて、(4)式と一緒に加えると、

(6)

この式が成立するためには、和の各項が０でなくてはならない。（このようにしなければならないのは N と E に束縛条件が存在し、(4)式単独では解けないため。この方法を Lagrange の未定乗数法という。）

(7)

よってj番目の系の粒子数N_jは次式で与えられる。

$N_j =$ (8)

次に未定乗数α,βを求めよう。
αは、$\Sigma N_j = N$ より、

$$\Sigma \exp(-\alpha-\beta\varepsilon_j) = \qquad = N \tag{9}$$

従って、

$$\frac{N_j}{N} = \tag{10}$$

Nの代わりにN_0を用いると、

$$\frac{N_j}{N_0} = \tag{11}$$

続いてβを求める。j 番目の系の粒子の平均エネルギー$\bar{\varepsilon}$は、

$$\bar{\varepsilon} = \tag{12}$$

この粒子の運動エネルギーをp_jとすると、この粒子の運動エネルギーε_jは質量をmとすれば、

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2}mv^2 = \tag{13}$$

(13)式を(12)式に代入して、和を積分に置き換えると、（並進エネルギーは古典的であるから）

$$\bar{\varepsilon} = \tag{14}$$

ここで、次の積分公式を利用する。

$$\int e^{-ax^2}dx = (\pi/a)^{1/2}, \ \int x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a^3}\right)^{1/2} \tag{15}$$

結局、$\bar{\varepsilon}$はβを用いて次のように書ける。

$$\bar{\varepsilon} = \tag{16}$$

すでに$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}kT$ であることを知っており、（1 次元の並進エネルギー）

$$\beta = \tag{17}$$

以上より、

$$\frac{N_j}{N_0} = $$
を得ることができた。