

必要があれば以下の定数や式を用いよ。論述が必要な問題に対し、論述のない解答は採点の対象外です。

プランク定数： $h=6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$	光速： $c=3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$	アボガドロ数： $N_A=6.02 \times 10^{23}$	気体定数： $R=8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
ボルツマン定数： $k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	ボルツマン分布式： $N_i = N_0 \exp\{-(\varepsilon_i - \varepsilon_0)/kT\}$	絶対温度の変換： $^{\circ}\text{C} = \text{K} - 273$	ド・ブロイ波長 $\lambda = h/mv$

0. 次の問に答えよ。必要があれば図や数式を用いよ。(15 点)

- 許容並進エネルギー $n^2 h^2 / (8ma^2)$ を導け。(上記のド・ブロイ波長の式を断りなく用いてよい。)
- ボルツマン分布式の物理的意味を適当な図を用いて説明せよ。(導出法を示す必要はない。)
- 分配関数 q の定義は $N=N_0 q$ である。このような関数を導入することの意義を説明せよ。

1. 非常に粗い近似で、分子の回転運動の量子化について考えてみる。分子の重心から原子までの距離を r 、分子の質量を m 、回転運動の速さを v とする。(20 点)

- 定常波の波長 λ が満たすべき条件は、 $2\pi r = n\lambda$ (n は整数) であることを示せ。
- (a) の結果とド・ブロイ波長の式を用いて、運動エネルギー $\frac{1}{2} m v^2$ と許容回転エネルギー ε との間の関係式 $\varepsilon = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m r^2}$ を導け。

- 分子量 0.036 kg/mol 、 $r=2 \times 10^{-10} \text{ m}$ の分子について回転エネルギー間隔因子 ($n=1$ の場合) を求めよ。
- 回転運動は、どのような光によって観察することができるか? (c) に基づいて、理由も含めて答えよ。

2. 温度が 27°C のとき、 $n=2$ の状態の占有数が $n=1$ の占有数よりずっと小さく、1% しか存在しない場合において、 N_2 分子 (分子量 0.028 kg/mol) を閉じ込める一次元の箱の大きさ a を求めたい。(20 点)

- $n=2$ と $n=1$ の間の並進エネルギー間隔 $\Delta\varepsilon$ を、 a を用いた文字式で表せ。
- 題意を満たすには分子数が $N_2/N_1=0.01$ となればよい。この式を $\Delta\varepsilon$ を用いて書き直せ。
- 一次元の箱の大きさ a はピコメートルのオーダー (約 14 pm) であることを示せ。
- (c) の結果は箱の大きさが非現実的であることを示唆している。そこで、現実には $n=2$ の状態の占有数と $n=1$ の占有数の比はどのようにになっているか考察せよ。

3. エネルギー ε に対する気体分子の分布式 (3 次元の場合) は $\frac{1}{N} \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$ で与えられる。以下の設問に、この式を基にして答えよ。(45 点)

- 1 mol あたり 3 次元並進エネルギーは $\frac{3}{2} RT$ であることを示せ。参考: $\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} dx = 3\sqrt{\pi} / (4a^{5/2})$

- $\varepsilon = \frac{1}{2} m v^2$ を利用して、Maxwell-Boltzmann 分布式 $\frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$ を導け。

- 横軸に v ($v \geq 0$)、縦軸に $\frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ をとって、ある 2 つの温度 T_1, T_2 における分布の様子を 2 つのグラフを同一座標上に描け。ただし、 $T_1 < T_2$ とする。グラフは原点や $v \rightarrow \infty$ での値に注意すること。