

必要があれば以下の定数や式を用いよ。論述が必要な問題に対し、論述のない解答は採点の対象外です。

プランク定数： $h=6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	光速： $c=3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$	アボガドロ数： $N_A=6.02 \times 10^{23}$	気体定数： $R=8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
ボルツマン定数： $k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	ボルツマン分布式： $N_i = N_0 \exp\{-(\epsilon_i - \epsilon_0)/kT\}$	絶対温度の変換： $= K - 273$	ド・ブロイ波長 $\lambda=h/mv$

以下、大問が 0 から 6 まで用意されている。0 と 1 のいずれか 1 問、2 と 3 のいずれか 1 問、4 は必須、5 と 6 いずれか 1 問、合計 4 問を選択して解答せよ。

0 . 次の問に答えよ。ただし電子質量 $m_e=9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、電気素量 $e=1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ である。

- 50kV の電圧で加速された電子のド・ブロイ波長を求めよ。
- 100km/h の速さで動いている質量 46g のゴルフボールのド・ブロイ波長を求めよ。
- (a)と(b)の答の物理的意味を簡潔に述べよ。

1 . 次の問に答えよ。必要があれば図や数式を用いよ。

- 許容並進エネルギー $n^2 h^2 / (8ma^2)$ を導け。(ド・ブロイ波長の式を断りなく用いてよい。)
- ボルツマン分布式の物理的意味を適当な図を用いて説明せよ。(導出法を示す必要はない。)
- 縮退度を説明せよ。

2 . H_2 分子 (分子量 $2.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$) が一辺 1 nm ($1 \times 10^{-9} \text{ m}$) の立方体の中に閉じ込められている。

- H_2 分子一分子の質量を kg 単位で、並進エネルギー間隔因子を J 単位で、それぞれ求めよ。
- 温度 27 °C における平均並進エネルギー $\frac{3}{2} kT$ を J 単位で求めよ。また、分子がこの平均エネルギーを持つときの有効量子数 n はいくらか。さらに x, y, z 各成分の量子数 (n_x, n_y, n_z) が全て等しいときの一成分あたりの量子数はいくらか。
- (b)の平均エネルギーをもつ分子が、 n_x から n_x+1 へ 1 つ量子数の大きい状態へ移る (n_y と n_z は不変) のに必要なエネルギーはいくらか。
- (c)の結果から、この場合、並進運動は古典的であるとは言えなくなっている。その理由がどこにあるか説明せよ。

3 . 温度が 27 °C のとき、 $n=2$ の状態の占有数 $N_{n=2}$ と $n=1$ の占有数 $N_{n=1}$ の比が $N_{n=2}/N_{n=1}=0.01$ である場合において、 N_2 分子 (分子量 0.028 kg/mol) を閉じ込める一次元の箱の大きさ a を求めたい。

- $n=2$ と $n=1$ の間の並進エネルギー間隔 $\Delta \epsilon$ を、 a のみを用いた式で表せ。
- 題意を満たす一次元の箱の大きさ a はピコメートルのオーダー (約 14 pm) であることを示せ。
- もし $N_{n=2}/N_{n=1}=0.999999999$ であれば、一次元の箱の大きさ a はいくらか。
- (b)と(c)の結果から、現実には $n=2$ の状態の占有数と $n=1$ の占有数の比はどのようなになっているか考察せよ。

4. エネルギー ε に対する気体分子の分布式(3次元の場合)は $\frac{1}{N} \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$ で与えられる。以下の設問に、この式を基にして答えよ。

- (a) 1mol あたり 3次元並進エネルギーは $\frac{3}{2}RT$ であることを示せ。参考： $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} dx = 3\sqrt{\pi}/(4a^{3/2})$
- (b) $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$ を利用して、Maxwell-Boltzmann 分布式 $\frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$ を導け。
- (c) 横軸に v ($v \geq 0$) 縦軸に $\frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ をとって、ある2つの温度 T_1, T_2 における分布の様子を2つのグラフを同一座標上に描け。ただし、 $T_1 < T_2$ とする。グラフは原点や $v \rightarrow \infty$ での値に注意すること。

5. 非常に粗い近似で、分子の回転運動の量子化について考えてみる。分子の重心から原子までの距離を r 、分子の質量を m 、回転運動の速さを v とする。

- (a) 定常波の波長 λ が満たすべき条件は、 $2\pi r = n\lambda$ (n は整数)であることを示せ。
- (b) (a)の結果とド・ブローイ波長の式を用いて、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ と許容回転エネルギー ε との間の関係式 $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m r^2}$ を導け。

- (c) 分子量 0.028 kg/mol、 $r = 2 \times 10^{-10}$ m の分子について回転エネルギー間隔因子 ($n=1$ の場合) を求めよ。

6. (a) 気体分子の熱エネルギーと分配関数の関係は $\bar{U} - \bar{U}_0 = \frac{N_A}{q} kT^2 \frac{dq}{dT}$ である。3次元の並進分配関数

$$q_{\text{trans}} = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} V$$

を用いて、1mol あたりの気体分子の並進熱エネルギーを R と T だけを用いて

表せ。

- (b) H_2 分子と O_2 分子で1molあたりの並進熱エネルギーは異なるか? 理由も含めて答えよ。ただし、気体分子は理想的である。
- (c) 温度、体積一定で圧力を100倍に変化させるとき、気体分子の3次元並進分配関数の値はどのように変化するか? 理由も含めて答えよ。ただし、気体分子は理想的である。