

必要があれば以下の定数や式を用いよ。論述は極力省略しないこと。

プランク定数： $h=6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$	光速： $c=3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$	アボガドロ数： $N_A=6.02 \times 10^{23}$	気体定数： $R=8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
ボルツマン定数： $k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	ボルツマン分布式： $N_i = N_0 \exp\{-(\epsilon_i - \epsilon_0)/kT\}$	絶対温度の変換： $= K - 273$	ド・ブロイ波長の式 $\lambda=h/mv$

0 . 次の問に答えよ。必要があれば図や数式を用いよ。(15 点)

- 許容並進エネルギー $n^2 h^2 / (8ma^2)$ の導出 (a は系のサイズ、 m は粒子の質量)
- 2 つの状態のエネルギー間隔が $kT/2$ の時、2 つの状態の占有数比 (ボルツマン分布に従うとせよ)
- 3 次元における並進エネルギーの縮退の説明

1 . N_2 分子 (分子量 $28.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$) が一辺 0.1 m の立方体の中に閉じ込められている。(30 点)

- N_2 分子一分子の質量を kg 単位で、並進エネルギー間隔因子 $\Delta \epsilon$ を J 単位で、それぞれ求めよ。
- 温度 27°C における平均並進エネルギー $\frac{3}{2} kT$ を J 単位で求めよ。また、分子がこの平均エネルギーを持つときの有効量子数 n はいくらか。さらに x, y, z 各成分の量子数 (n_x, n_y, n_z) が全て等しいときの一成分あたりの量子数はいくらか。
- (b) の平均エネルギーをもつ分子が、 n_x から n_x+1 へ 1 つ量子数の大きい状態へ移る (n_y と n_z は不変) のに必要なエネルギーはいくらか。
- (c) の結果から、並進運動は古典的であるといえる。その理由を説明せよ。

2 . 以下の文章中の空欄 (1) ~ (7) を埋めよ。解答に至る過程もあわせて解答用紙に明示せよ。(35 点)

粗い近似によって分子の回転運動を考えてみる。この問題は円周上を粒子が並進運動すると考えればよい。粒子が半径 r の円周上を運動するとき、その円周上の定常波に求められる条件は、円周の長さが (1) の整数 n 倍に等しいことであり、 $2\pi r = (2)$ である。この条件式と運動エネルギーの式から、量子化された回転許容エネルギーの式 $\epsilon_{\text{rot}} = (3)$ を得る。今、考えている分子の分子量を 0.032 kg/mol とし、半径 $r = 2 \times 10^{-10} \text{ m}$ の範囲で回転運動するとしたら、回転エネルギー間隔因子 (4) は約 (5) J であり、この値と同じエネルギー量を持つ光の波長はプランクの式 $\epsilon = (6)$ から計算できて約 (7) m であり、この波長の光は赤外線からマイクロ波領域にかけてのものであるから、回転ラマン分光法などによって、回転運動は観測できることになる。

問題は裏に続きます

3. 気体分子に関する Maxwell-Boltzmann 分布式は次の式で与えられる。(20 点)

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdots (1)$$

ここで、 N は気体分子の総数、 m は気体 1 分子の質量、 v は気体分子の速さ、 T は絶対温度である。

- (a) ある 1 つの気体分子、二つの温度 T_1 および T_2 (ただし、 $T_1 > T_2$ とする) について、速さ v に対する気体分子の分布 $\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dv} \right)$ の概形を同一グラフ上に図示せよ。それぞれの曲線がどちらの温度のものであるか、図中に T_1 および T_2 を明示せよ。
- (b) (1)式は次のように書き直すことができる。

$$\frac{dN}{N} = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = 4\pi v^2 p(v) dv$$

$p(v)$ および $4\pi v^2 dv$ の物理的意味について簡潔に述べよ。

- (c) 気体分子の根平均二乗の速さ $\sqrt{v^2}$ を m , k および T を用いて表せ。ただし、必要があれば、

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ を用いてよい。}$$