

必要があれば以下の定数や式を用いよ。論述は極力省略しないこと。

プランク定数： $h=6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$	光速： $c=3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$	アボガドロ数： $N_A=6.02 \times 10^{23}$	気体定数： $R=8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
ボルツマン定数： $k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	ボルツマン分布式： $N_i = N_0 \exp\{-(\varepsilon_i - \varepsilon_0)/kT\}$	絶対温度の変換： $^{\circ}\text{C} = \text{K} - 273$	ド・ブロイ波長の式 $\lambda = h/mv$

0. 次の問 (a) ~ (c) に答えよ。(15 点)

- 許容並進エネルギー $n^2 h^2 / (8ma^2)$ を導出せよ。ただし、 a は系のサイズ、 m は粒子の質量とする。
- 2 つの状態の占有数比が $1/2$ の時、2 つの状態のエネルギー間隔を求めよ。ただし、ボルツマン分布に従い、縮退度は 1、温度は 27°C とする。
- 有効量子数が 10^9 の時、3 次元における並進エネルギーの縮退度はいくらか。縮退度の一般式を導出してから求めよ。

1. N_2 分子（分子量 $28.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ）が長さ 0.1 m の線分に閉じ込められている。(20 点)

- N_2 分子一分子の質量を kg 単位で、並進エネルギー間隔因子 $\Delta \varepsilon$ を J 単位で、それぞれ求めよ。
- 温度 27°C における平均並進エネルギー $\frac{1}{2} kT$ を J 単位で求めよ。また、分子がこの平均エネルギーを持つときの量子数 n はいくらか。
- (b) の平均エネルギーをもつ分子が、 n から $n+1$ へ 1 つ量子数の大きい状態へ移る時に必要なエネルギーはいくらか。
- (c) の結果から、並進運動は古典的であるといえる。その理由を、エネルギー準位図を描いて説明せよ。

2. 以下の文章中の空欄 (1) ~ (7) を埋めよ。解答に至る過程もあわせて解答用紙に明示せよ。(35 点)

粗い近似によって分子の回転運動を考えてみる。この問題は円周上を粒子が並進運動すると考えればよい。粒子が半径 r の円周上を運動するとき、その円周上の定常波に求められる条件は、円周の長さが (1) の整数 n 倍に等しいことであり、 $2\pi r =$ (2) である。この条件式と運動エネルギーの式から、量子化された回転許容エネルギーの式 $\varepsilon_{\text{rot}} =$ (3) を得る。今、考えている分子の分子量を 0.028 kg/mol とし、半径 $r = 2 \times 10^{-10} \text{ m}$ の範囲で回転運動するとしたら、回転エネルギー間隔因子 (4) は約 (5) J であり、この値と同じエネルギー量を持つ光の波長はプランクの式 $\varepsilon =$ (6) から計算できて約 (7) m であり、この波長の光は赤外線からマイクロ波領域にかけてのものであり、回転ラマン分光法などによって、回転運動は観測できることになる。

問題は裏に続きます

3. 気体分子に関する Maxwell-Boltzmann 分布式は次の式で与えられる。(30 点)

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdots (1)$$

ここで、 N は気体分子の総数、 m は気体 1 分子の質量、 v は気体分子の速さ、 T は絶対温度である。

- (a) 式(1)から、一次元の速さ v_x に対する分布の式 $p(v_x)$ を導くことができる。その考え方を述べ、分布式 $p(v_x)$ を求めよ。ただし、 v_x は正、負どちらの値も取り得るとする。
- (b) ある 1 つの気体分子、二つの温度 T_1 および T_2 (ただし、 $T_1 > T_2$ とする) について、速さ v に対する気体分子の分布 $\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dv}\right)$ の概形を同一グラフ上に図示せよ。それぞれの曲線がどちらの温度のものであるか、図中に T_1 および T_2 を明示せよ。
- (c) 気体分子の平均の速さ $\bar{v}$ を m, k および T を用いて表せ。ただし、必要があれば、 $\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$ を用いてよい。
- (d) 式(1)を用いて、エネルギーに対する分布式 $\frac{1}{N} \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$ を求めよ。
- (e) (d)の結果を用いて、3 次元における気体 1 分子の並進エネルギーが $\frac{3}{2} kT$ になることを示せ。ただし、必要があれば、 $\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-ax} dx = 3\sqrt{\pi} / (4a^{\frac{5}{2}})$ を用いてよい。