

必要があれば以下の定数や式を用いよ。論述が必要な問題に対し、論述のない解答は採点の対象外です。

プランク定数： $h=6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$	光速： $c=3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$	アボガドロ数： $N_A=6.02 \times 10^{23}$	気体定数： $R=8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
ボルツマン定数： $k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	ボルツマン分布式： $N_i = N_0 \exp\{-(\epsilon_i - \epsilon_0)/kT\}$	絶対温度の変換： $^{\circ}\text{C} = \text{K} - 273$	ド・ブロイ波長 $\lambda = h/mv$

以下の大問全てを解答せよ。

0. 次の問に答えよ。ただし電子質量 $m_e=9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、電気素量 $e=1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ である。

- 60kV の電圧で加速された電子の速さとド・ブロイ波長を求めよ。
- 150km/h の速さで投げられた質量 150g の野球のボールのド・ブロイ波長を求めよ。
- (a)の答から、X 線で Al 薄膜からの回折を観察することができるのと同様に、電子線でも回折を観察できることがわかる。その理由を述べよ。

1. N_2 分子（分子量 0.028 kg/mol）が一辺 0.1m の立方体の中に閉じ込められている。

- 許容並進エネルギーの式 $n^2 h^2 / (8ma^2)$ を導け。（ド・ブロイ波長の式を断りなく用いてよい。）
- H_2 分子一分子の質量を kg 単位で、並進エネルギー間隔因子を J 単位で、それぞれ求めよ。
- 温度 27°C における平均並進エネルギー $\frac{3}{2} kT$ を J 単位で求めよ。また、分子がこの平均エネルギーを持つときの有効量子数 n はいくらか。
- (c)の有効量子数のとき、x, y, z 各成分の量子数 (n_x, n_y, n_z) が全て等しい場合の一成分あたりの量子数はいくらか。また、その状態のもとで、 n_x から n_x+1 へ 1 つ量子数の大きい状態へ移る (n_y と n_z は不変) のに必要なエネルギー $\Delta \epsilon$ はいくらか。
- 以上の結果から、並進運動は古典的であるいえる。その理由を説明せよ。

2. 温度が 27°C のとき、 $n=10^9$ の占有数 $N_{n=10^9}=1$ の占有数 $N_{n=1}$ の比が $N_{n=10^9}/N_{n=1}=0.01$ である場合において、 N_2 分子（分子量 0.028 kg/mol）を閉じ込める一次元の箱の大きさ a を求めたい。

- $n=10^9$ と $n=1$ の間の並進エネルギー間隔 $\Delta \epsilon$ を、 a のみを用いた式で表せ。
- 題意を満たす一次元の箱の大きさ a はミリメートルのオーダーであることを示せ。
- もし $N_{n=10^9}/N_{n=1}=0.5$ であれば、一次元の箱の大きさ a はいくらか。
- (b)と(c)の結果から、現実には $n=10^9$ の状態の占有数と $n=1$ の占有数の比はどのようになっているか、箱のサイズに着目して考察せよ。

問題は裏に続きます

3. エネルギー ε に対する気体分子の分布式 (3 次元の場合) は $\frac{1}{N} \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$ で与えられる。以下の設問に、この式を基にして答えよ。

(a) 1 分子あたりの 3 次元並進エネルギーは $\frac{3}{2} kT$ であることを示せ。参考: $\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-ax} dx = 3\sqrt{\pi} / (4a^{\frac{5}{2}})$

(b) $\varepsilon = \frac{1}{2} mv^2$ を利用して、Maxwell-Boltzmann 分布式 $\frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$ を導け。

(c) 横軸に v ($v \geq 0$)、縦軸に $\frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ をとって、Maxwell-Boltzmann 分布のグラフを描け。グラフは原点や $v \rightarrow \infty$ での値に注意すること。また、最も確率の高い速さ v_a を求め、グラフ上に示せ。

4. (a) 気体分子の熱エネルギーと分配関数の関係は $\bar{U} - \bar{U}_0 = \frac{N_A}{q} kT^2 \frac{dq}{dT}$ である。3 次元の並進分配関数

$$q_{\text{trans}} = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} V$$

を用いて、1mol あたりの気体分子の並進熱エネルギーを R と T だけを用いて

表せ。

(b) H_2 分子と O_2 分子で 1mol あたりの並進熱エネルギーは異なるか? 理由も含めて答えよ。ただし、気体分子は理想的である。

(c) 圧力一定で体積を 1/100 倍に変化させるとき、気体分子の 3 次元並進分配関数の値はどのように変化するか? 理由も含めて答えよ。ただし、気体分子は理想的である。