

必要があれば以下の定数や式を用いよ。論述が必要な問題に対し、論述のない解答は採点の対象外です。

プランク定数： $h=6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$	光速： $c=3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$	アボガドロ数： $N_A=6.02 \times 10^{23}$	気体定数： $R=8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
ボルツマン定数： $k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	ボルツマン分布式： $N_i = N_0 \exp\{-(\varepsilon_i - \varepsilon_0)/kT\}$	絶対温度の変換： $^{\circ}\text{C} = \text{K} - 273$	ド・ブロイ波長 $\lambda = h/mv$

以下の大問 1 から 4、全て解答せよ。

1. 次の問に答えよ。ただし電子質量 $m_e=9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、電気素量 $e=1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ である。

- 60kV の電圧で加速された電子のド・ブロイ波長を求めよ。
- 150km/h の速さで投げられた質量 150g の野球のボールのド・ブロイ波長を求めよ。
- 許容並進エネルギー $n^2 h^2 / (8ma^2)$ を導け。(ド・ブロイ波長の式を断りなく用いてよい。)
- ボルツマン分布を説明せよ。

2. N_2 分子 (分子量 0.028 kg/mol) が一辺 0.1m の立方体の中に閉じ込められている。

- N_2 分子一分子の質量を kg 単位で、並進エネルギー間隔因子を J 単位で、それぞれ求めよ。
- 温度 27°C における平均並進エネルギー $\frac{3}{2} kT$ を J 単位で求めよ。また、分子がこの平均エネルギーを持つときの有効量子数 n はいくらか。
- (b) の有効量子数のとき、 x, y, z 各成分の量子数 (n_x, n_y, n_z) が全て等しい場合の一成分あたりの量子数はいくらか。また、その状態のもとで、 n_x から n_x+1 へ 1 つ量子数の大きい状態へ移る (n_y と n_z は不変) のに必要なエネルギー $\Delta\varepsilon$ はいくらか。
- 以上の結果から、並進運動は古典的であるいえる。その理由を説明せよ。

問題は裏に続きます

3. エネルギー ε に対する気体分子の分布式 (3次元の場合) は $\frac{1}{N} \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$ で与えられる。以下の設問に、この式を基にして答えよ。

(a) 1mol あたり 3次元並進エネルギーは $\frac{3}{2}RT$ であることを示せ。参考: $\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-ax} dx = 3\sqrt{\pi} / (4a^{\frac{5}{2}})$

(b) $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$ を利用して、Maxwell-Boltzmann 分布式 $\frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$ を導け。

(c) 横軸に v ($v \geq 0$)、縦軸に $\frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ をとって、ある 2つの温度 T_1, T_2 における分布の様子を 2つのグラフを同一座標上に描け。ただし、 $T_1 < T_2$ とする。グラフは原点や $v \rightarrow \infty$ での値に注意すること。

4. 非常に粗い近似で、分子の回転運動の量子化について考えてみる。分子の重心から原子までの距離を r 、分子の質量を m 、回転運動の速さを v とする。

(a) 定常波の波長 λ が満たすべき条件は、 $2\pi r = n\lambda$ (n は整数) であることを示せ。

(b) (a)の結果とド・ブロイ波長の式を用いて、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ と許容回転エネルギー ε との間の関係式 $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m r^2}$ を導け。

(c) 分子量 0.028 kg/mol、 $r = 2 \times 10^{-10}$ m の分子について回転エネルギー間隔因子 ($n=1$ の場合) を求めよ。

(d) 回転運動は、どのような光によって観察することができるか? (c)に基づいて、理由も含めて答えよ。