

みみず鎖 (wormlike chain) の平均 2 乗両末端間距離の導出

$L=nb$ と $\frac{b}{1-\cos\theta} = \frac{1}{2\lambda}$ を用いて、自由回転鎖の式を書き直す。(ただし $n \rightarrow \infty$)

自由回転鎖の両末端間距離は

$$\langle R^2 \rangle = nb^2 \left\{ \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} - \frac{2\cos\theta(1-\cos^n\theta)}{n(1-\cos\theta)^2} \right\} \cdots \text{教科書 3-7 式}$$

$$= \frac{nb^2}{1-\cos\theta} \left\{ (1+\cos\theta) - \frac{2\cos\theta(1-\cos^n\theta)}{n(1-\cos\theta)} \right\}$$

ここで、 $\cos\theta = 1 - 2\lambda b = 1 - 2\lambda \frac{L}{n}$ を用いると、(始めの 2 条件式から求められる)

$$= \frac{L}{2\lambda} \left\{ \left(1 + 1 - 2\frac{\lambda L}{n} \right) - \frac{2 \left(1 - \frac{2\lambda L}{n} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2\lambda L}{n} \right)^n \right\}}{n(1-\cos\theta)} \right\}$$

ここで、 $\frac{1}{n(1-\cos\theta)} = \frac{1}{2\lambda L}$ を用いると、(始めの 2 条件式から求められる)

$$= \frac{L}{2\lambda} \left[(2-0) - \frac{2(1-0) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2\lambda L}{n} \right)^n \right\}}{2\lambda L} \right]$$

$$= \frac{L}{2\lambda} \left[2 - \frac{1}{\lambda L} \left\{ 1 - \left\{ \left(1 - \frac{2\lambda L}{n} \right)^{\frac{n}{2\lambda L}} \right\}^{2\lambda L} \right\} \right]$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2\lambda L}{n} \right)^{\frac{n}{2\lambda L}} \right\}^{2\lambda L} = e^{-2\lambda L}$ を用いると、(極限の公式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n} \right)^n = e^{-a}$)

$$= \frac{L}{2\lambda} \left\{ 2 - \frac{1}{\lambda L} (1 - e^{-2\lambda L}) \right\} = \frac{L}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{1}{2\lambda L} (1 - e^{-2\lambda L}) \right\} \cdots \text{教科書 3-9 式}$$